

Concursul județean de matematică “NUMERUS”**Clasa a V-a****SUBIECTUL I**

- a) Comparați numerele:

$$x = 3^{53} \text{ și } y = 2^{81} - 2^{80} - 2^{78}$$

- b) Determinați $\overline{ab}$, dacă: $32^{\overline{ab}} = 64^{\overline{ba}}$

SUBIECTUL II

Aratați că: $N = 23 + 23^2 + \dots + 23^{2007}$ este divizibil cu 553.

SUBIECTUL III

Fie șirul de numere naturale: 3, 8, 13, 18

- a) Scrieți următorii trei termeni ai șirului;
- b) Determinați al 2014-lea termen al șirului;
- c) Calculați suma termenilor impari ai șirului mai mici decât 1007.

SUBIECTUL IV

Doi colegi citesc două cărți având același număr de pagini. În prima zi unul citește a cincea parte din cartea sa, iar celălalt a saptea parte, constatând că a citit cu 16 pagini mai puțin decât primul. Câte pagini mai au de citit fiecare?

Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

Concursul județean de matematică “NUMERUS”**Clasa a VI-a****SUBIECTUL I**

a) Demonstrați că oricare ar fi n număr natural nenul, numărul

$A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ este divizibil cu 13.

b) Arătați că numărul $a = 15 + 3^{2014}$ se divide cu 24.

(Gazeta Matematică)

SUBIECTUL II

Câte numere naturale impare dau prin împărțire la 2014 câtul egal cu restul? Aflați restul împărțirii sumei tuturor acestor numere la 2014.

(Gazeta Matematică, enunț modificat)

SUBIECTUL III

Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta [OC un unghi de măsura de 95° , iar biseptoarele unghiurilor AOB și BOC formează un unghi de 70° .

a) Determinați măsurile unghiurilor AOC, AOB și BOC.

b) Dacă semidreapta [OM este opusă semidreptei [OB aflați măsura unghiului COM.

SUBIECTUL IV

Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A, B, C, D, E, în această ordine, astfel încât B este mijlocul segmentului [AC], $[AC] \equiv [CD] \equiv [ED]$ și $BD = 6\text{cm}$.

a) Calculați distanța de la A la D.

b) Aflați lungimea segmentului [AE].

**

Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

Concursul județean de matematică “NUMERUS”**Clasa a VII-a****SUBIECTUL I**

- a) Fie numerele $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 4028$ și

$$y = 2014 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2015}\right).$$

Arătați că $a = x - 2015 \cdot y$, este pătrat perfect

- b) Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b + c = 4\sqrt{2} - 8$. Demonstrați că

$$|a + \sqrt{2}| + |b + 4| + |c - 3| \geq 5\sqrt{2} - 7$$

Prof. Danciu Alin Florin

SUBIECTUL II

Se consideră numerele raționale nenule a, b, c, d . Dacă

$$\frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b},$$

arătați că $abcd < 0$

Gazeta matematica 2014

SUBIECTUL III Fie $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AD \perp BC$ ($D \in [BC]$) și $[BE]$ bisectoarea unghiului $\hat{ABC}$ ($E \in [AC]$), iar $\{M\} = AD \cap BE$. Dacă $AN \perp BE$ ($N \in [BC]$), arătați că $AMNE$ este romb.

Prof. Danciu Alin Florin

SUBIECTUL IV

Fie $ABCD$ un pătrat și punctele $M \in AB$, $P \in CD$ astfel încât $[AM] \equiv [CP]$, iar punctele N, Q sunt punctele de intersecție ale mediatoarei segmentului $[MP]$ cu laturile AD , respectiv BC .

- a) Arătați că punctele A, O, C sunt coliniare.
b) Arătați că $MNPQ$ este pătrat.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

Concursul județean de matematică “NUMERUS”**Clasa a VIII-a****SUBIECTUL I**

- a) Determinați numerele raționale x și y știind că: $16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 10\sqrt{2}$.
- b) Arătați că pentru orice numere reale pozitive a și b avem: $\left(8 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{8}\right) > \frac{113}{8}$.

SUBIECTUL II

- a) Demonstrați că pentru orice numere naturale nenule k și n , $2^k - 1$ divide numărul

$$2^{nk+1} + 2^{nk+2} + \dots + 2^{nk+k-1} + 1.$$

- b) Numerele a, b, c sunt numere raționale pozitive și $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Arătați că numerele $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ sunt numere raționale.

SUBIECTUL III

Fie ABCD un dreptunghi în care $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a$ și M un punct nesituat în planul dreptunghiului astfel încât $MA=2a$. Știind că (AE) și (AF) sunt mediane în triunghiurile ADM , respectiv ABM , iar (AG) este bisectoarea unghiului MAC , $G \in (MC)$. Aflați raportul ariilor triunghiurilor EFG și BCD .

SUBIECTUL IV

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se consideră punctul $M \in (AG)$ și se notează cu $\{P\} = AB \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ și $\{R\} = AD \cap (CDM)$. a) Arătați că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$; b) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore

“Numerus” megyei matematikaverseny

V. osztály

I. Tétel

- a) Hasonlítsuk össze a következő számokat:

$$x = 3^{53} \text{ și } y = 2^{81} - 2^{80} - 2^{78}$$

- b) Határozzuk meg $\overline{ab}$ számot, ha: $32^{\overline{ab}} = 64^{\overline{ba}}$

II. Tétel

Mutassuk ki, hogy: $N = 23 + 23^2 + \dots + 23^{2007}$ osztható 553-el.

III. Tétel

Adott a 3, 8, 13, 18 természetes számokból álló sorozat.

- Irjuk le a sorozat következő három tagját.
- Határozzuk meg a sorozat 2014-dik tagját.
- Számoljuk ki a sorozat 1007-nél kisebb páratlan tagjainak összegét.

IV. Tétel

Két barát ugyanannyi oldalszámú két könyvet olvas. Első nap az egyik elolvassa könyve egy ötödét, a másik pedig könyve egy hetedét, amikor észrevette, hogy 16 oldallal olvasott kevesebbet mint az első. Hány oldalt kell még olvassanak külön-külön?

Minden tétel kötelező.

Minden tétel 7 pontot ér.

Munkaidő 2 óra

“Numerus” megyei matematikaverseny**VI. osztály****I. Tétel**

a) Mutassuk ki, hogy bármely n nullától különböző természetes szám esetén

$$A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2} \text{ osztható } 13\text{-mal.}$$

b) Mutassuk ki, hogy $a = 15 + 3^{2014}$ osztható 24-el.

(Gazeta Matematică)

II. Tétel

Hány olyan páratlan természetes szám létezik melynek 2014-el való osztásakor a hányados egyenlő a maradékkal? Határozzuk meg ezen számok összegének 2014-el való osztási maradékát.

(Gazeta Matematică, enunț modificat)

III. Tétel

Az AOB és BOC egymásmelletti szögek. Az AOB szög szögfelezője az [OC félegyenessel 95° mértékű szöget zár be, valamint az AOB és BOC szögek szögfelezői 70° mértékű szöget zárnak közre.

a) Határozzuk meg az AOC, AOB, BOC szögek mértékét.

b) Ha az [OM és [OB ellentétes félegyenese, akkor számítsuk ki a COM szög mértékét.

IV. Tétel

Legyenek A, B, C, D, E egy egyenesen levő különböző pontok ebben a sorrendben úgy, hogy B az [AC] szakasz felezőpontja, $[AC] \equiv [CD] \equiv [ED]$ és $BD = 6\text{cm}$.

a) Számítsuk ki az A és D pontok távolságát.

b) Határozzuk meg az [AE] szakasz hosszát.

Minden tétel kötelező.

Minden tétel 7 pontot ér.

Munkaidő 2 óra

“NUMERUS” megyei matematikaverseny

VII. osztály

I. Tétel

a) Adottak $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 4028$ és

$$y = 2014 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2015}\right) \text{ számok. Mutassuk ki, hogy}$$

$a = x - 2015 \cdot y$ teljes négyzet.

b) Legyen $a, b, c \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $a + b + c = 4\sqrt{2} - 8$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|a + \sqrt{2}| + |b + 4| + |c - 3| \geq 5\sqrt{2} - 7$$

Prof. Danciu Alin Florin

II. Tétel

Legyenek a, b, c, d nullától különböző racionális számok.

$$\text{Ha } \frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b}, \text{ mutassuk ki, hogy } abcd < 0$$

Gazeta matematica 2014

III. Tétel

Legyen ABC háromszög ($\hat{m}(\hat{A}) = 90^\circ$), $AD \perp BC$ ($D \in [BC]$) és $[BE]$ az $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ szög szögfelezője, $E \in [AC]$, valamint $\{M\} = AD \cap BE$. Ha $AN \perp BE$ ($N \in [BC]$), mutassuk ki, hogy AMNE rombusz.

Prof. Danciu Alin Florin

IV. Tétel

Az ABCD négyzet esetén adottak $M \in AB$, $P \in CD$ úgy, hogy $[AM] \equiv [CP]$, valamint N, Q az $[MP]$ oldalfelező merőlegesnek AD és BC oldalakkal való metszéspontjai.

- Mutassuk ki, hogy A, O, C pontok kollineárisak.
- Mutassuk ki, hogy MNPQ négyzet.

Minden tétel kötelező.

Minden tétel 7 pontot ér.

Munkaidő 2 óra**Numerus” megyei matematikaverseny****VIII. osztály****I. Tétel**

- a) Határozzuk meg az x és y racionális számokat, tudva, hogy: $16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 10\sqrt{2}$.
- b) Mutassuk ki, hogy bármely a és b pozitív valós szám esetén: $\left(8 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{8}\right) > \frac{113}{8}$.

II. Tétel

- a) Bizonyítsuk be, hogy bármely nullától különböző k és n természetes szám esetén $2^k - 1$ osztja a következő számot:

$$2^{nk+1} + 2^{nk+2} + \dots + 2^{nk+k-1} + 1$$

- b) Az a, b, c pozitív racionális számok, valamint $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Mutassuk ki, hogy $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ racionális számok.

III. Tétel

Egy $ABCD$ téglalap esetén $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a$ és legyen M a téglalap síkján kívüli pont, melyre $MA=2a$. Tudva, hogy (AE) és (AF) az ADM , illetve ABM háromszögek oldalfelezői, valamint (AG) az MAC szög szögfelezője, $G \in (MC)$, határozzuk meg az EFG és BCD háromszögek területeinek arányát.

IV. Tétel

Legyen A, B, C, D négy nem kolpanáris pont és G a BCD háromszög súlypontja. Felvesszük az $M \in (AG)$ pontot és jelöljük $\{P\} = AB \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ és $\{R\} = AD \cap (CDM)$.

- a) Mutassuk ki, hogy $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$;
- b) Bizonyítsuk be, hogy $(PQR) \parallel (BCD)$.

Minden tétel kötelező.**Minden tétel 7 pontot ér.****Munkaidő 2 óra**

Concursul județean de matematică "NUMERUS"

BAREM DE EVALUARE

CLASA a V – a

SUBIECT I

$$a) y = 2^{78} \cdot (2^3 - 2^2 - 1) = 2^{78} \cdot (8 - 4 - 1) = 2^{78} \cdot 3 \quad 1p$$

$$x = 3^{53} = 3^{52} \cdot 3 = 3^{2 \cdot 26} \cdot 3 = (3^2)^{26} \cdot 3 = 9^{26} \cdot 3 \quad 1p$$

$$y = 2^{78} \cdot 3 = 2^{3 \cdot 26} \cdot 3 = (2^3)^{26} \cdot 3 = 8^{26} \cdot 3 \quad 1p$$

$$\text{Deci } x > y \quad 1p$$

$$b) 32^{\overline{ab}} = 2^{5\overline{ab}} \quad 1p$$

$$64^{\overline{ba}} = 2^{6\overline{ba}}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \overline{ab} = 6 \cdot \overline{ba}$$

$$\text{Deci } 5(10 \cdot a + b) = 6(10 \cdot b + a) \Rightarrow 50 \cdot a + 5 \cdot b = 60 \cdot b + 6 \cdot a.$$

$$\text{Scădem } 6 \cdot a \text{ și } 5 \cdot b \text{ și obținem } 44 \cdot a = 55 \cdot b \text{ deci obținem } 4 \cdot a = 5 \cdot b$$

$$\text{deci } a = 5, b = 4, \text{ atunci } \overline{ab} = 54 \quad 2p$$

SUBIECT II

Se observa ca avem un numar de 2007 termeni care se pot grupa câte 3. 1p

$$N = 23 \cdot (1 + 23 + 23^2) + \dots + 23^{2005} \cdot (1 + 23 + 23^2) =$$

$$23 \cdot 553 + \dots + 23^{2005} \cdot 553 = 553 \cdot (23 + \dots + 23^{2005})$$
 este divizibil cu 553

6p

SUBIECT III

a) Următorii termeni sunt: 23, 28, 33

1p

b) Primul termen: $3 = 5 \cdot 0 + 3$;

1p

al doilea termen $8 = 5 \cdot 1 + 3$;al treilea termen: $13 = 5 \cdot 2 + 3$;deci al 2014-lea termen este: $5 \cdot 2013 + 3 = 10068$

2p

c) $3 + 13 + 23 + \dots + 1003 = (10 \cdot 0 + 3) + (10 \cdot 1 + 3) + \dots + (10 \cdot 100 + 3)$
 $= 3 \cdot 101 + 10 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 303 + 50500 = 50803$

3p

SUBIECT IVNotăm a 5-a parte dintr-o carte cu x și a 7-a parte cu y

1p

Deci $x = 16 + y$

1p

 $5 \cdot x = 7 \cdot y$

1p

Ne rezultă $5 \cdot (16 + y) = 7 \cdot y$, deci $80 + 5 \cdot y = 7 \cdot y$, rezultă $y = 40$ și $x = 56$

2p

Cărțile au fiecare $56 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280$ pagini.

1p

Elevii mai au de citit 224 respectiv 240 pagini.

1p

Concursul județean de matematică "NUMERUS"**BAREM DE EVALUARE**

CLASA a VI- a

1. a) Demonstrați că oricare ar fi n număr natural nenul, numărul

$$A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2} \text{ este divizibil cu } 13.$$

- c) Arătați că numărul $a = 15 + 3^{2014}$ se divide cu 24.

(Gazeta Matematică)

Barem

a) $A = 63^n + 7^n \cdot 3^{2n} \cdot 21 - 21^n \cdot 3^n \cdot 9$ 1p

$A = 63^n + 63^n \cdot 21 - 63^n \cdot 9 \cdot 3$ 1p

$= 63^n \cdot (1 + 21 - 9) = 63^n \cdot 13 \Rightarrow A \text{ este divizibil cu } 13$ 1p

b) $a = 15 + 9^{1007} = 9^{1007} + 24 - 9 = 9^{1007} - 9 + 24$ 2p

$a = 9 \cdot (9^{1006} - 1) + 24 = 9 \cdot [(8+1)^{1006} - 1] + 24 = 9 \cdot (M_8 + 1 - 1) + 24 = 9 \cdot M_8 + 24 = 9 \cdot 8k + 24 = M_{24}$, deci
a se divide cu 24. 2p

2. Câte numere naturale impare dau prin împărțire la 2014 câtul egal cu restul? Aflați restul împărțirii sumei tuturor acestor numere la 2014.

(Gazeta Matematică, enunț modificat)

Barem

$n : 2014 = c \text{ (rest } c) \Rightarrow d = \hat{c} + r, r < \hat{c}$ 1p

$n = 2014c + c \Rightarrow n = 2015c, c < 2014$ 1p

n -impar $\Rightarrow c$ – număr impar $\Rightarrow c \in \{1, 3, 5, \dots, 2013\}$

$2013 - 1006 = 1007$ (numere cu această proprietate) 1p

$S = 2015 \cdot 1 + 2015 \cdot 3 + 2015 \cdot 5 + \dots + 2015 \cdot 2013 = 2015 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 2013)$ 1p

$$1+3+5+\dots+2013 = 1+2+3+4+\dots+2013 - (2+4+6+\dots+2012) = 2013 \cdot 2014 : 2 - 2 \cdot (1+2+3+\dots+1006) = 2013 \cdot 1007 - 2 \cdot 1006 \cdot 1007 : 2 = 1007^2 \dots\dots\dots 1p$$

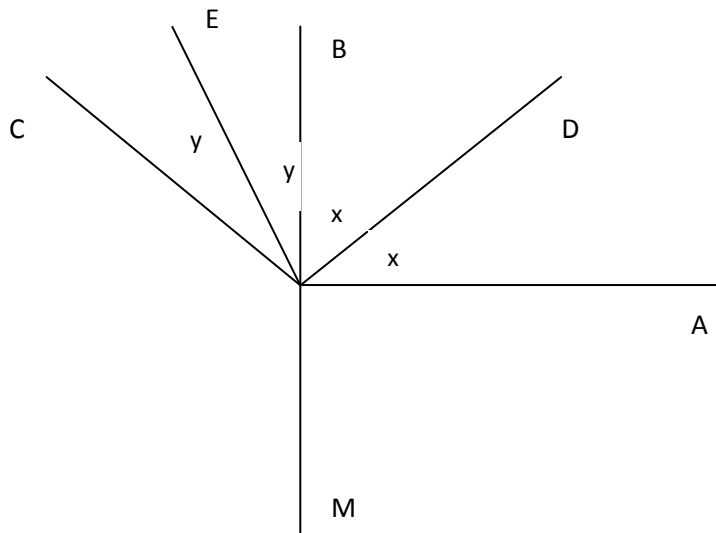
$$S = 2015 \cdot 1007^2, S = (2014+1) \cdot 1007^2 = 2014 \cdot 1007^2 + 1007^2 = 2014 \cdot 1007^2 + 1007 \cdot (1006+1) = 2014 \cdot 1007^2 + 1007 \cdot 1006 + 1007 = 2014 \cdot 1007^2 + 1007 \cdot 2 \cdot 503 + 1007 = 2014 (1007^2 + 503) + 1007 \dots\dots\dots 1p$$

Restul împărțirii sumei la 2014 este 1007 $\dots\dots\dots 1p$

3. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta [OC un unghi de măsura de 95° , iar bisectoarele unghiurilor AOB și BOC formează un unghi de 70° .

a) Determinați măsurile unghiurilor AOC, AOB și BOC.

b) Dacă semidreapta [OM este opusă semidreptei [OB aflați măsura unghiului COM.



Barem

a) Desen $\dots\dots\dots 1p$

Fie [OD bisectoarea unghiului AOB și

[OE bisectoarea unghiului BOC

$$\Rightarrow m(\angle AOD) = m(\angle DOB) = x \text{ și}$$

$$m(\angle BOE) = m(\angle EOC) = y \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle DOE) = 70^\circ \Rightarrow x+y = 70^\circ$$

$$m(\angle DOC) = 95^\circ \Rightarrow x+y+y = 95^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow y = 25^\circ \text{ și } x = 45^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOB) = 90^\circ, m(\angle AOC) = 140^\circ, m(\angle BOC) = 50^\circ \dots\dots\dots 2p$$

b) $m(\angle COM) = 180^\circ - m(\angle COB) = 130^\circ$ 1p

4. Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A, B, C, D, E, în această ordine, astfel încât B este mijlocul segmentului [AC], $[AC] \equiv [CD] \equiv [ED]$ și $BD = 6\text{cm}$.

a) Calculați distanța de la A la D.

b) Aflați lungimea segmentului [AE].

Barem

Din B mijlocul lui (AC) rezultă $AB = BC$(1p)

$ED = DC = CA = 2BC$ (1p)

$BD = BC + CD = BC + 2BC = 3BC$, deci $BC = 2\text{ cm}$(2p)

$AD = AC + CD = 4BC = 8\text{ cm}$ (1p)

b) $AE = 3AC = 3 \cdot 2BC = 12\text{cm}$ (2p)

Concursul județean de matematică “NUMERUS”

BAREM DE EVALUARE

CLASA a VII - a

SUBIECTUL I

c) Fie numerele $x = 2 + 4 + 6 + \dots + 4028$ și

$$y = 2014 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2015}\right). \text{ Arătați că } a = x - 2015 \cdot y, \text{ este}$$

pătrat perfect

d) Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b + c = 4\sqrt{2} - 8$. Demonstrați că

$$|a + \sqrt{2}| + |b + 4| + |c - 3| \geq 5\sqrt{2} - 7$$

Prof. Danciu Alin Florin

Barem

$$\text{a) } x = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2014) = 2 \cdot \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2014 \cdot 2015 \quad 1\text{p}$$

$$y = 2014 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2014}{2015} = \frac{2014}{2015} \quad 2\text{p}$$

$$a = x - 2015 \cdot y = 2014 \cdot 2015 - 2015 \cdot \frac{2014}{2015} = 2014 \cdot (2015 - 1) = 2014^2 \quad 2\text{p}$$

b) Se aplică inegalitatea $|x| + |y| \geq |x + y|$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$

Se obține

$$\begin{aligned} |a + \sqrt{2}| + |b + 4| + |c - 3| &\geq |a + \sqrt{2} + b + 4 + c - 3| = \\ &= |a + b + c + \sqrt{2} + 1| = |4\sqrt{2} - 8 + \sqrt{2} + 1| = |5\sqrt{2} - 7| \end{aligned} \quad 1\text{p}$$

$$5\sqrt{2} - 7 > 0 \Rightarrow |5\sqrt{2} - 7| = 5\sqrt{2} - 7 \Rightarrow \text{inegalitatea cerută} \quad 1\text{p}$$

SUBIECTUL II

Se consideră numerele raționale nenule a, b, c, d . Dacă

$$\frac{1}{a + b + c + d} = \frac{2}{b + c + d} = \frac{3}{c + d + a} = \frac{4}{d + a + b}, \text{ arătați că } abcd < 0$$

Gazeta matematica 2014

Barem:

$$\text{Din } \frac{1}{a+b+c+d} = \frac{2}{b+c+d} = \frac{3}{c+d+a} = \frac{4}{d+a+b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = \frac{b+c+d}{2} = \frac{c+d+a}{3} = \frac{d+a+b}{4} = k \quad 2p$$

$$\text{Obținem } a+b+c+d=k \quad (1)$$

$$b+c+d=2k \quad (2)$$

$$c+d+a=3k \quad (3)$$

$$d+a+b=4k \quad (4) \quad 2p$$

$$\text{Din (1) și (2) obținem } a=-k$$

$$\text{Din (1) și (3) obținem } b=-2k$$

$$\text{Din (1) și (4) obținem } c=-3k$$

$$\text{Înlocuim în (1) și găsim Din (1) și (3) obținem } d=7k \quad 2p$$

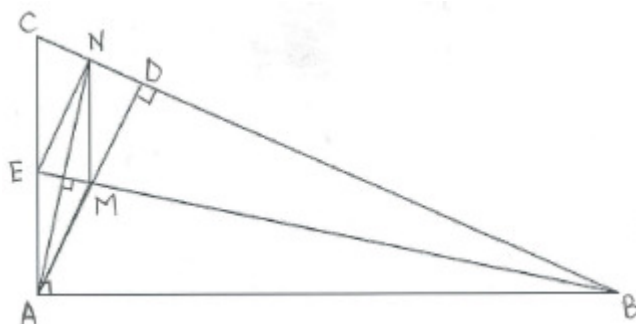
$$\Rightarrow abcd = -42k^4 < 0 \quad 1p$$

SUBIECTUL III

Fie $\triangle ABC$ ($m(\hat{A})=90^\circ$), $AD \perp BC$ ($D \in [BC]$) și $[BE]$ bisectoarea unghiului $\hat{ABC}$ ($E \in [AC]$), iar $\{M\}=AD \cap BE$. Dacă $AN \perp BE$ ($N \in [BC]$), arătați că $AMNE$ este romb.

Prof. Danciu Alin Florin

Barem:



- $$=m(\hat{E}CB) + m(\hat{E}BC) = m(\hat{A}EM) \quad \mathbf{2p}$$

$$\Rightarrow \hat{AME} \equiv \hat{AEM} \Rightarrow \Delta AME \text{ isoscel } ([AM] \equiv [AE]) \quad \mathbf{1p}$$

Observăm că $\triangle EMN$ isoscel ($[NE] \equiv [NM]$) deoarece $[NO]$ este și mediană și înălțime în $\triangle EMN$ **1p**

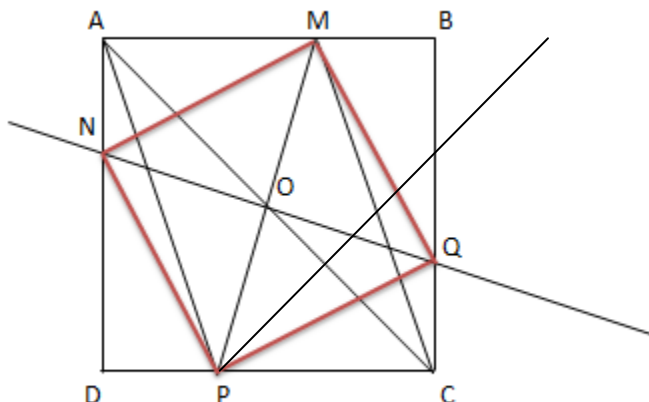
Mai trebuie arătat că $[AE] \equiv [EN]$ lucru evident deoarece E se află pe bisectoarea unghiului $\hat{A}BN$

Deci, $[AM] \equiv [MN] \equiv [NE] \equiv [AE] \Rightarrow AMNE$ romb **1p**

Fie ABCD un pătrat și punctele $M \in AB$, $P \in CD$ astfel încât $[AM] \equiv [CP]$, iar punctele N, Q sunt punctele de intersecție ale medietoarei segmentului $[MP]$ cu laturile AD, respectiv BC.

- c) Arătați că punctele A, O, C sunt coliniare.
d) Arătați că MNPQ este pătrat.

Barem:



a)

$$\left. \begin{array}{l} [AM] \equiv [CP] (ip.) \\ AM \parallel CP \end{array} \right\} \Rightarrow AMCP \text{ paralelogram} \Rightarrow AC \cap MP = \{O\} \text{ (diagonalele unui paralelogram se} \\ \text{înjumătățesc)} \Rightarrow A, O, C \text{ coliniare}$$

(2p)

b)

$$\left. \begin{array}{l} [AO] \equiv [OC] (cf. pct. a)) \\ \hat{AON} \equiv \hat{COQ} (op. la vârf) \\ \hat{NAO} \equiv \hat{QCO} (= 45^\circ) \end{array} \right\} \xRightarrow{U.L.U} \Delta AON \equiv \Delta COQ \Rightarrow [NO] \equiv [OQ] \quad (1) \text{ și } [AM] \equiv [CQ]$$

(1p)

$$\left. \begin{array}{l} [MO] \equiv [OP] (ip.) \\ [NO] \equiv [OQ] (1) \end{array} \right\} \Rightarrow MNPQ \text{ paralelogram (2)}$$

Din N, Q se află pe mediatoarea segmentului $[MP] \Rightarrow NQ \perp MP \Rightarrow MNPQ$ romb**(2p)**

$$\left. \begin{aligned} m(\hat{M}\hat{O}\hat{B}) + m(\hat{B}\hat{O}\hat{Q}) &= m(\hat{C}\hat{O}\hat{Q}) + m(\hat{C}\hat{O}\hat{P}) = 90^\circ \\ m(\hat{M}\hat{O}\hat{B}) + m(\hat{A}\hat{O}\hat{M}) &= m(\hat{C}\hat{O}\hat{Q}) + m(\hat{B}\hat{O}\hat{Q}) = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow m(\hat{A}\hat{O}\hat{M}) = m(\hat{B}\hat{O}\hat{Q}) \quad ([\hat{A}\hat{O}\hat{M}] \equiv [\hat{C}\hat{O}\hat{P}] -$$

op. la vf.) **(1)**

(1p).

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}\hat{O}\hat{M} &\equiv \hat{B}\hat{O}\hat{Q} \quad (1) \\ [\hat{A}\hat{O}] &\equiv [\hat{B}\hat{O}] \\ \hat{O}\hat{A}\hat{M} &\equiv \hat{O}\hat{B}\hat{Q} (= 45^\circ) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{U.L.U} \Delta \hat{A}\hat{O}\hat{M} \equiv \Delta \hat{B}\hat{O}\hat{Q} \Rightarrow [\hat{O}\hat{M}] \equiv [\hat{O}\hat{Q}] \Rightarrow [\hat{M}\hat{P}] \equiv [\hat{N}\hat{Q}] \Rightarrow \text{MNPQ pătrat}$$

(1p)

Concursul județean de matematică "NUMERUS"

BAREM DE EVALUARE

CLASA a VIII - a

SUBIECTUL I

- a) Determinați numerele raționale **x și y** știind că: $16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 10\sqrt{2}$.
- b) Arătați că pentru orice numere reale pozitive **a și b** avem: $\left(8 + \frac{1}{a} \right) \left(a + \frac{1}{b} \right) \left(b + \frac{1}{8} \right) > \frac{113}{8}$.

Soluție

a) $16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| = \frac{\sqrt{33 - 20\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad \textbf{(1p)}$

$\Leftrightarrow |x-1| - |y^2 - 2|\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2} \quad (1p) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 5 \\ |y^2 - 2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4, 6\} \text{ și } y \in \{0, \pm 2\} \quad \textbf{(1p)}.$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(8 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{8}\right) = \left(8ab + a + 8 + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{8} + \frac{1}{a} + \frac{1}{8ab}\right) = \\ & = \left(8ab + \frac{1}{8ab}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \frac{65}{8} \end{aligned} \quad (1p)$$

Cum,

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad b + \frac{1}{b} \geq 2 \text{ si } 8ab + \frac{1}{8ab} \geq 2, \text{ deducem ca } \left(8 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{8}\right) > \frac{113}{8}$$

(2p)

SUBIECTUL II

- a) Demonstrați că pentru orice numere naturale nenule k și n , $2^k - 1$ divide numărul

$$2^{nk+1} + 2^{nk+2} + \dots + 2^{nk+k-1} + 1.$$

- b) Numerele a, b, c sunt numere raționale pozitive și $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Arătați că numerele $\sqrt{a}$ și $\sqrt{b}$ sunt numere raționale.

Soluție

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2^{nk+1} + 2^{nk+2} + \dots + 2^{nk+k-1} + 1 = 2^{nk} (2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) + 1 = 2^{nk} (2^k - 2) + 1 = \\ & (1p) \\ & = 2^k \cdot 2^{nk} - 2 \cdot 2^{nk} + 1 = 2^{nk+k} - 2^{nk} - 2^{nk} + 1 = 2^{nk} (2^k - 1) - (2^{nk} - 1) \\ & (1p) \end{aligned}$$

$$2^{nk} - 1 = (2^k)^n - 1 = (2^k - 1)(2^{nk-k} + 2^{nk-k-1} + \dots + 1) \quad (1p)$$

$$2^{nk+1} + 2^{nk+2} + \dots + 2^{nk+k-1} + 1 = (2^k - 1)(2^{nk} - 2^{nk-k} - 2^{nk-k-1} - \dots - 1) \quad (1p)$$

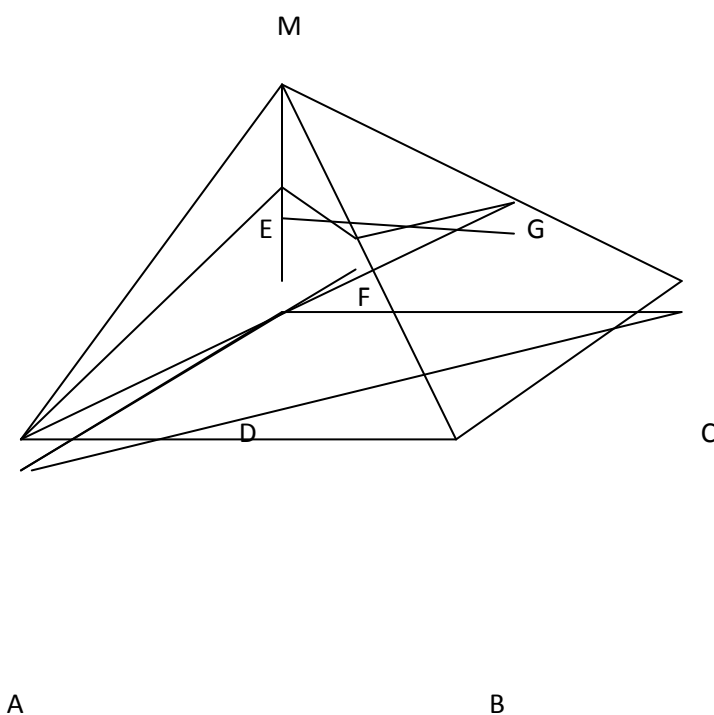
$$\text{b)} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = c \quad \left| \sqrt{a} - \sqrt{b} \right| \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c} \quad (1p)$$

Adunând relația, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ cu relația $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{c}$ obținem că $\sqrt{a} = \frac{c^2 + a - b}{2c} \in Q \quad (1p)$

Analog, $\sqrt{b} = \frac{c^2 - a + b}{2c} \in Q \quad (1p)$

SUBIECTUL III

Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a$ și M un punct nesituat în planul dreptunghiului astfel încât $MA=2a$. Știind că (AE) și (AF) sunt mediane în triunghiurile ADM , respectiv ABM , iar (AG) este bisectoarea unghiului MAC , $G \in (MC)$. Aflați raportul ariilor triunghiurilor EFG și BCD .

Soluție

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow \triangle ABC (\sphericalangle B = 90^\circ) \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow \triangle MAC$ isoscel **(2p)**

$$\begin{cases} \Delta MAC - isoscel \\ (AG - bi\ sec\ toare \end{cases} \Rightarrow (AG) - mediana \Rightarrow FG - \text{linie mijlocie în } \Delta MBC \Rightarrow FG \parallel BC \text{ și } FG = \frac{BC}{2} \quad (1)$$

p)

$$\begin{cases} BC \subset (BCD) \\ FG \parallel BC \end{cases} \Rightarrow FG \parallel (BCD) \quad (1) \quad (1p)$$

EF - linie mijlocie în $\Delta MBD \Rightarrow EF \parallel BD, BD \subset (BCD) \Rightarrow EF \parallel (BCD) \quad (2) \quad (1p)$ Din relațiile (1) și (2)

$$\text{și cum } EF \cap FG = \{F\} \Rightarrow (EFG) \parallel (BCD) \Rightarrow \Delta EFG \approx \Delta BCD \Rightarrow \frac{A_{\Delta EFG}}{A_{\Delta BCD}} = \left(\frac{FG}{BC} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad (2p)$$

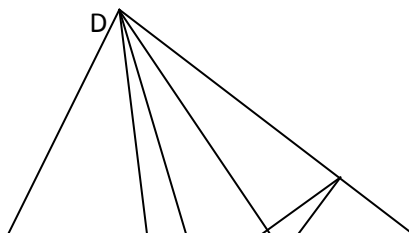
SUBIECTUL IV

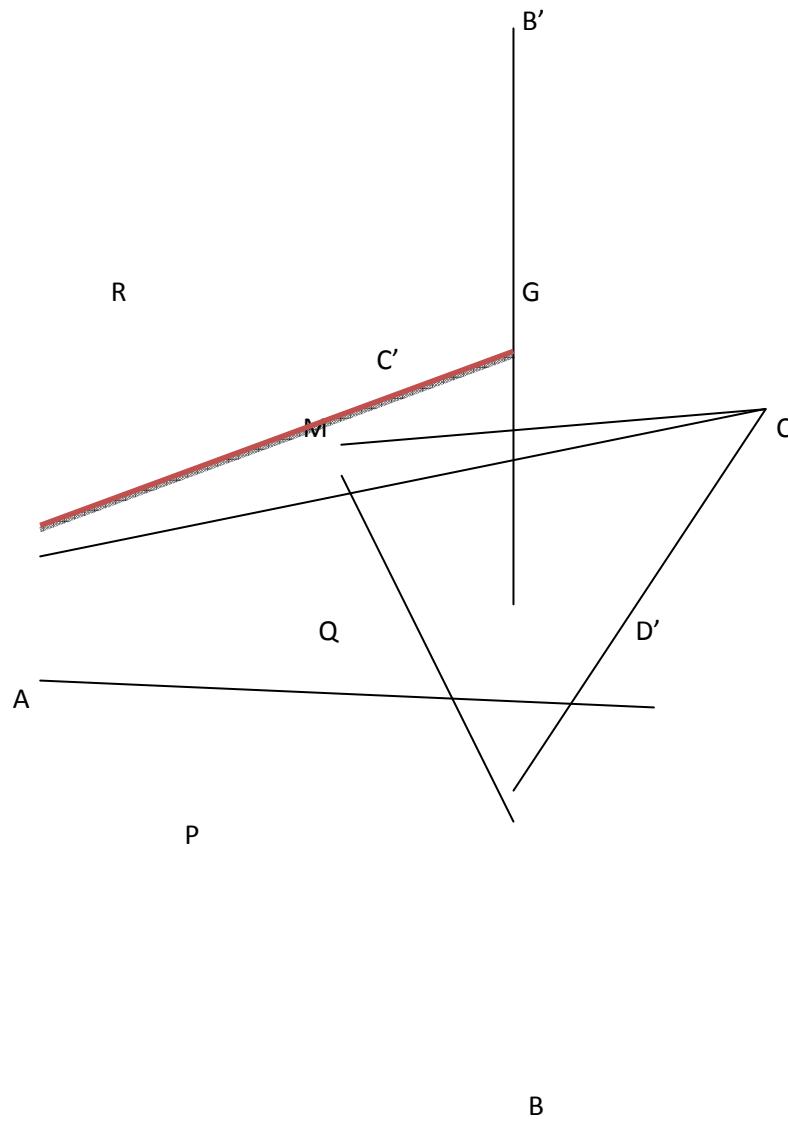
Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se consideră punctul $M \in (AG)$ și se notează cu $\{P\} = AB \cap (CDM)$, $\{Q\} = AC \cap (BDM)$ și $\{R\} = AD \cap (CDM)$. a)

Arătați că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$; b) Demonstrați că $(PQR) \parallel (BCD)$.

Soluție

a)





$$AD \cap (CDM) = D'M \cap AD = \{R\} \quad (1p)$$

Vom considera triunghiul ADG și transversala R – M – D', aplicăm teorema Menelaus și avem:

$$\frac{AR}{DR} \cdot \frac{DD'}{D'G} \cdot \frac{GM}{AM} = 1 \quad (2p)$$

Cum G este centru de greutate în $\triangle BCD$ vom avea că $\frac{DD'}{GD'} = 3$, deci $\frac{AR}{DR} \cdot 3 = \frac{AM}{MG}$ (q.e.d) **(1p)**

b) Aplicăm teorema Menelaus în triunghiul ABG și transversala P – M – B' obținând:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{GB'} \cdot \frac{GM}{AM} = 1. \text{ Cum G este centru de greutate în } \triangle BCD \text{ vom avea că } \frac{BB'}{GB'} = 3, \text{ deci}$$

$$\frac{AP}{PB} \cdot 3 = \frac{AM}{MG}. \quad (1p)$$

Din relațiile $\frac{AR}{DR} \cdot 3 = \frac{AM}{MG}$ și $\frac{AP}{PB} \cdot 3 = \frac{AM}{MG}$ deducem că $\frac{AR}{RD} = \frac{AP}{PB}$ și conform reciproci

teoremei Thales avem că $RP \parallel BD$. **(1p)**

$$\begin{cases} BD \subset (BCD) \\ RP \parallel BD \end{cases} \Rightarrow RP \parallel (BCD)(1). \text{ Analog demonstrăm că } PQ \parallel (BCD)(2) \text{ și din relațiile (1) și (2)}$$

deducem că $(PRQ) \parallel (BCD)$. **(1p)**